следующих параметрах: длина полосы l=200 см, ширина b=5 см, толщина h=0.5 см, $E=3\cdot10^8$ кг/см^2, коэффициент Пуассона $\nu=0$.

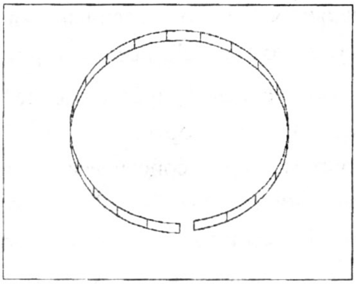

Рис. 1

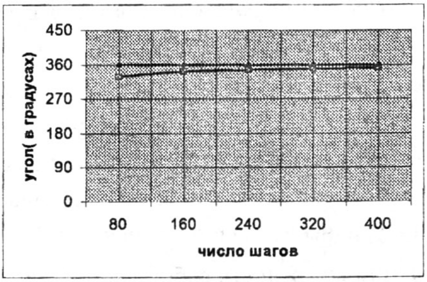

Рис. 2

Таким образом, при 80-ти шагах нагружения получаем погрешность 8.6%, при 160-ти – 5%, при 400-х – 2.2%.

Литература

1. Голованов А.И., Гурьянова О.Н. Исследование нелинейного деформирования слоистых оболочек произвольной геометрии МКЭ // Тр. XVIII Межд. конф. по теории оболочек и пластин. – Саратов, 1997. – Т. 1. – С. 44–48.
2. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник / Под ред. И.А.Биргера, Я.Г.Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 568 с.

НАХОЖДЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА

Дегтяренко Н.А., Зверович Э.И.

Белорусский Государственный Технологический Университет, г. Минск

Пусть K и K' – положительные числа. Обозначим через $sn(\cdot)$ эллиптическую функцию Якоби [1] с основными периодами $4K$ и $2iK'$. Рассмотрим однородное сингулярное интегральное уравнение

$$\varphi(t)-\frac{\lambda}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{sn(\tau-t)}=0,\quad -a<t<a, \tag{1}$$

где $a\in(0,K)$. Так как функция $sn(\cdot)$ вещественная на вещественной оси и нечетная, то выполняется тождество

$$\overline{\left(\frac{1}{\pi\, i}\frac{1}{sn(t-\tau)}\right)}\equiv\frac{1}{\pi\, i}\frac{1}{sn(\tau-t)}. \tag{2}$$

Поэтому интегральный оператор в (1) является самосопряженным (как оператор из $L_2(-a,a)$ в $L_2(-a,a)$). Следовательно (см. [2]), все его характеристические числа λ – вещественные, а собственные функции, соответствующие различным характеристическим числам, – ортогональны. В данной работе найдена в явном виде вся система характеристических чисел и соответствующих им собственных функций интегрального оператора в уравнении (1) в пространстве $L_2(-a,a)$. Применительно к уравнению (1) принадлежность собственных функций пространству $L_2(-a,a)$ означает их ограниченность, поэтому ниже будет идти речь только об ограниченных собственных функциях.

Для решения поставленной задачи применим метод аналитического продолжения [3], т. е. введем в рассмотрение двоякопериодическую кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi(z):=\frac{1}{2\pi\, i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{sn(\tau-z)},\quad z\notin[-a,a], \tag{3}$$

где все символы в правой части обозначают то же самое, что и в уравнении (1).Так как дифференциал $\dfrac{d\tau}{sn(\tau-z)}$ имеет в точках $\tau=z,\quad \tau=z+2K$ простые полюсы с вычетами в них, равными 1 и -1 соответственно, то для интеграла (3) на линиях его разрыва (*-a, a*) и (*-a+2K, a+2K*) справедливы формулы Сохоцкого [3]:

$$\begin{cases}\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)=\varphi(t),\\ \Phi^{+}(t)+\Phi^{-}(t)=\dfrac{1}{\pi\, i}\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{sn(\tau-t)}.\end{cases} \tag{4}$$

Используя эти формулы, а также тождество $sn(z+2K)\equiv -sn(z)$, перепишем уравнение (1) в виде следующей задачи линейного сопряжения:

$$\begin{cases}\Phi^{+}(t)=\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}\Phi^{-}(t),\quad t\in(-a,a),\\ \Phi(iy-K)+\Phi(iy+K)=0,\quad -K'<y<K',\\ \Phi(x-iK')=\Phi(x+iK'),\quad -K<x<K.\end{cases} \tag{5}$$

Задача (5) – это однородная задача линейного сопряжения на торе, а именно, на прямоугольнике $[-K,K]\times[-iK',iK']$ со склеенными парами противолежащих сторон. В силу формул (3) и (4) уравнение (1) и задача (5) равносильны, если условиться искать их решения в классе ограниченных функций. Решая задачу (5) с помощью известной теории [4], находим весь спектр характеристических значений интегрального оператора в уравнении (1)

$$\lambda_m = \frac{e^{(2m+1)\pi K'/a}-1}{e^{(2m+1)\pi K'/a}+1}, \quad m\in Z, \tag{6}$$

а также всю систему его собственных функций в пространстве $L_2(-a,a)$, соответствующих характеристическим значениям (6):

$$\varphi_m(t) = C\exp(\frac{\pi i}{2K}(1+2m)t)\times\exp\left(\frac{\pi(2m+1)K'}{2\pi ia}\int_{-a}^{a}\left(\varsigma(\tau-t)d\tau-\frac{d\tau}{2K}\int_{-K-iK'}^{K-iK'}\varsigma(u-t)du\right)\right),$$

$m\in Z$, $\varsigma(\cdot)$ – дзета-функция Вейерштрасса [1], построенная по основным периодам $2K$; $2iK'$, а C – произвольная постоянная. Таким образом, получена новая ортогональная система функций в пространстве $L_2(-a,a)$.

Литература

1. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. – 303 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 543 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
4. Зверович Э.И. // Успехи матем. наук. – 1971. – Т. 26. – Вып. 1 (157). – С. 113–179.

К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ ТРЕХМЕРНОГО НАПОРНОГО ПЛАСТА

Елесин А.В., Габидуллина А.Н., Кадырова А.Ш.

Институт механики и машиностроения КНЦ РАН, г. Казань

Разработан и численно реализован алгоритм определения коэффициента фильтрации для напорного неоднородного трехмерного пласта произвольной конфигурации. Рассматриваемая задача относится к классу некорректных. Коэффициент фильтрации **K** в уравнении стационарной однофазной напорной фильтрации жидкости